المحاضرة الأولى :

الحركية

تعريف علم الحركة : هو احدى فروع علم الميكانيك الهندسي الذي يبحث في حركة الجسيمات او الاجسام بغض النظر عن القوى المسببة للحركة او عطالة الاجسام (الكتلة).

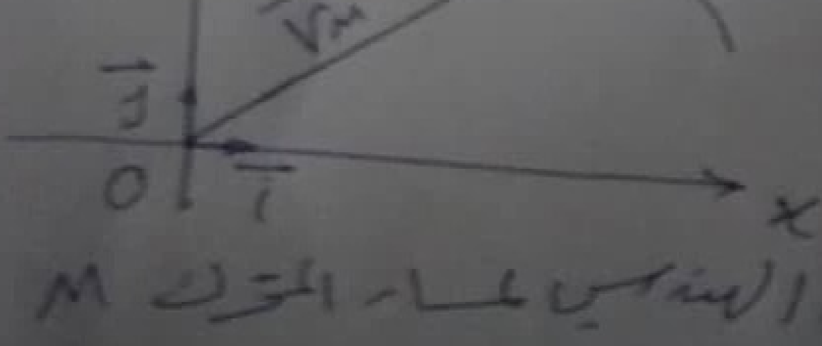
هدف علم الحركة : ايجاد المميزات الاساسية لحركة الاجسام (المسار - السرعة - التسارع).

* لايجاد هذه المميزات لابد من ايجاد العلاقة التي تربط بين مكان المتحرك أي احداثياته بالزمن t.

طرق ايجاد احداثيات الجسم :

١- طريقة المتجهات (الطريقة الشعاعية) :

تبسيطاً للاستنتاج سوف نعتبر ان الجسم يتحرك في مستوي (oxy)



المتحرك M يتحرك في مستوي (oxy) على خط منحني

$\vec{r}_M$: شعاع الموضع لـ M

إن رأس الشعاع يرسم المحل الهندسي لمسار المتحرك M

أثناء حركته.

لتحديد مكان المتحرك يلزمنا معرفة العلاقة التي تربط شعاع الموضع بالزمن:

$$\vec{r}_M = f(t)$$

في حال معرفة هذه العلاقة يمكننا التعويض بالزمن ومعرفة مكان المتحرك وتحديد مساره.

على سبيل المثال:

$$\vec{r}_M = 5t^2\vec{i} + 3t\vec{j}$$

$$t = 0 \Rightarrow \vec{r}_M = \vec{0} \Rightarrow x = 0 \,,\, y = 0$$

$$t = 1 \Rightarrow \vec{r}_M = 5\vec{i} + 3\vec{j} \Rightarrow x = 5 \,,\, y = 3$$

سرعة المتحرك: نشتق شعاع الموضع بالنسبة للزمن:

السرعة الوسطى:

$$\vec{V}_{av} = \frac{\Delta \vec{r}_M}{\Delta t} = \frac{\vec{r}_{M_1} - \vec{r}_{M_0}}{t_1 - t_0}$$

السرعة اللحظية:

$$\vec{V}_M = \frac{d\vec{r}_M}{dt} = \dot{\vec{r}}_M \quad (m.s^{-1})$$

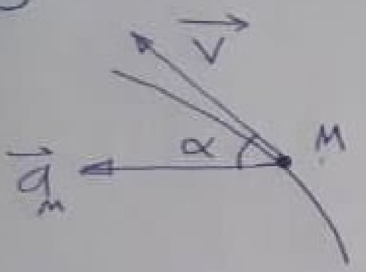
وهي عبارة عن شعاع يعبر عن معدل تغير شعاع الموضع بالنسبة للزمن ويكون دائماً مماس للمسار وباتجاه الحركة.

التسارع: نشتق شعاع السرعة بالنسبة للزمن:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \dot{\vec{V}}_M = \ddot{\vec{r}}_M \quad (m.s^{-2})$$

وهو عبارة عن شعاع بالحالة العامة يتجه الى داخل التقعر وليس الى مركز التقعر لأن له مركبتان هما مماسية تنطبق على مماس الشعاع

(3)



السرعة وهنا ضمة الى مركز التقعر :

في حال : $\alpha < \frac{\pi}{2}$

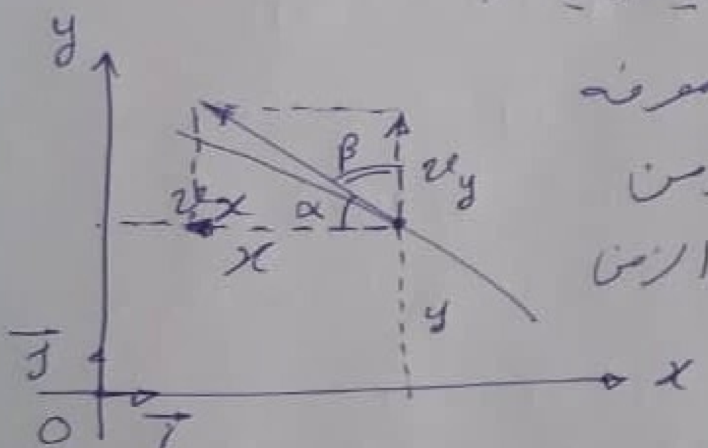
$\vec{a} \cdot \vec{V} > 0$

الحركة متسارعة

$\vec{a} \cdot \vec{V} < 0 \quad \alpha > \frac{\pi}{2}$

الحركة متباطئة :

2- طريقة الاحداثيات الديكارتية :



لتحديد مكان المتحرك يكفي معرفة كيفية تغير x , y مع الزمن وفي حال حركة فراغية z مع الزمن

$x = f_1(t)$

$y = f_2(t)$

وفي حال فراغية

$z = f_3(t)$

للاستفادة من العلاقات السابقة في طريقة المتجهات نقوم بربط الاحداثيات الديكارتية مع الطريقة الشعاعية

$\vec{r_M} = x\vec{i} + y\vec{j}$

السرعة :

$\vec{V_M} = \frac{d\vec{r_M}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j}$

حيث : $\begin{cases} \dot{x} = \frac{dx}{dt} \\ \dot{y} = \frac{dy}{dt} \end{cases}$

$\vec{V_M} = v_x\vec{i} + v_y\vec{j}$

v_x ، v_y : مركبات شعاع السرعة على x و y

طويلة شعاع السرعة :

$v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$

التجيبات الموجهة لشعاع السرعة:

$$\cos\alpha = \frac{v_x}{v_M} \quad , \quad \tan\gamma = \frac{v_y}{v_x}$$

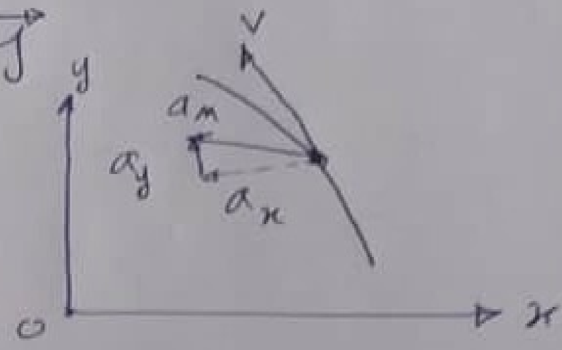
$$\cos\beta = \frac{v_y}{v_M}$$

التسارع:

$$\vec{a}_M = \frac{d\vec{V}_M}{dt} = \ddot{x}\,\vec{i} + \ddot{y}\,\vec{j}$$

$$\vec{a}_M = a_x\,\vec{i} + a_y\,\vec{j}$$

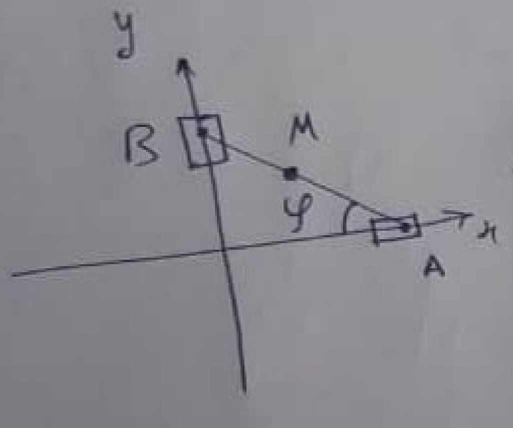
$$a_M = \sqrt{a_x^2 + a_y^2}$$



مثال:

يتحرك طرفي العارضة A و B على المحورين x و y بينما تتغير الزاوية φ وفق العلاقة $\varphi = \omega t$

المطلوب:



١- إيجاد المحل الهندسي للنقطة M

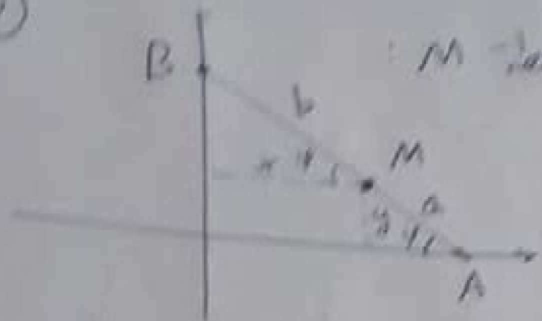
٢- سرعة النقطة M ديكارتياً وشعاعياً.

٣- إيجاد تسارع النقطة M ديكارتياً وشعاعياً

٤- إيجاد سرعة وتسارع النقطة M عندما تقع على المحاور الاحداثية x و y لأول مرة.

حيث: $AB = l$ و $AM = a$ ، $BM = b$

(5)



حسب الاحداثيات الديكارتية للنقطة M :

$$x = b\cos\varphi = b\cos(\omega t)$$

$$y = a\sin\varphi = a\sin(\omega t)$$

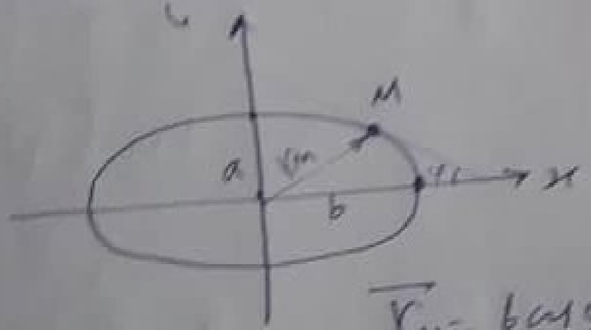
لإيجاد المحل الهندسي للنقطة M نحذف الوسيط φ

$$\left.\begin{array}{l}\cos^2\varphi = \dfrac{x^2}{b^2}\\[2mm] \sin^2\varphi = \dfrac{y^2}{a^2}\end{array}\right\} \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = \cos^2\varphi + \sin^2\varphi = 1$$

أي :

معادلة قطع ناقص $\dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$

النقطة M تتحرك وفق قطع ناقص محوره الكبير b ومحوره الصغير a .



$$\vec{r}_M = x\vec{i} + y\vec{j}$$

شعاعياً :

$$\vec{r}_M = b\cos\varphi\,\vec{i} + a\sin\varphi\,\vec{j}$$

السرعة :

$$\left.\begin{array}{l}v_x = \dot{x} = -b\omega\sin(\omega t)\\ v_y = \dot{y} = a\omega\cos(\omega t)\end{array}\right\} v_M = \sqrt{v_x^2 + v_y^2}$$

شعاعياً

$$\vec{V}_M = -b\omega\sin(\omega t)\,\vec{i} + a\omega\cos(\omega t)\,\vec{j}$$

التسارع :

$$a_x = \ddot{x} = -b\omega^2\cos\omega t$$

$$a_y = \ddot{y} = -a\omega^2\sin\omega t$$

⑥ ثانياً

$$\vec{a}_M = \dot{\vec{V}}_M = -\omega^2 (b\cos\omega t\,\vec{i} + a\sin\omega t\,\vec{j})$$

$$\vec{a}_M = -\omega^2 (x\vec{i} + y\vec{j}) = -\omega^2 \vec{r}_M$$

أي شعاع التسارع له نفس حامل شعاع الموضع ولكنه
بالاتجاه المعاكس دوماً.

٤- عندما تقع النقطة M للأول مرة على المحاور الاحداثية:
الزاوية φ تأخذ القيم $\varphi = 0$, $\varphi = \frac{\pi}{2}$

عندما $\varphi = 0 \Leftarrow$

$v_x = 0$
$v_y = a\omega$ $\} \; v_M = a\omega$

$\vec{V}_M = a\omega\cos(\omega t)\,\vec{j} = a\omega\vec{j}$

$a_x = -b\omega^2$
$a_y = -0$ $\} \; a_M = -b\omega^2$

$\vec{a}_M = -b\omega^2\vec{i}$

عندما $\varphi = \frac{\pi}{2} \Leftarrow$

$v_x = -b\omega$
$v_y = 0$ $\} \; v_M = -b\omega$

$\vec{V}_M = -b\omega\vec{i}$

$a_x = 0$
$a_y = -a\omega^2$ $\} \; a_M = -a\omega^2$

$\vec{a}_M = -a\omega^2\vec{j}$